2021 – 2022

3ο Επαναληπτικό διαγώνισμα διάρκειας 3 ωρών στο 1ο κεφάλαιο
(Συναρτήσεις – Όρια – Συνέχεια)

Θέμα Α

Α1. Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano και να δώσετε την γεωμετρική του ερμηνεία.

5 μονάδες

Α2. Να αναφέρετε πότε δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες.

4 μονάδες

Α3. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\alpha\in\mathbb{R}$ είναι $\lim\limits_{x\to x_0} f(f(x))=f(\alpha)$.

β) Κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει ρίζα στο $\mathbb{R}$.

γ) Για κάθε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)\geq 0$, για x κοντά στο x_0 και $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=2$ είναι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=4$.

δ) Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με την $f\circ g$ να είναι συνάρτηση 1-1 ισχύει ότι και η g είναι συνάρτηση 1-1.

ε) Αν για την συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$, τότε κατ'ανάγκη είναι $f(\alpha)f(\beta)<0$.

$2\times 5=10$ μονάδες

Α4. Ένας καθηγητής έβαλε στην τάξη την παρακάτω άσκηση.

«Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

- $f(x)=\begin{cases} g(x), & x<0 \\ h(x), & x\geq 0\end{cases}$
- Η g είναι συνεχής στο $x_0=0$, η h είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ και $g(0)=h(0)$.

Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο μηδέν ».

Ένας μαθητής πήρε τον λόγο και είπε πως η άσκηση δίνει παραπάνω δεδομένα που δεν χρειάζονται, καθώς αφού η h είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ τότε η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ άρα και στο μηδέν.

Αν ήσασταν ο καθηγητής τι θα απαντούσατε στον μαθητή και πως θα λύνατε την άσκηση;

6 μονάδες

Θέμα Β

Δίνονται οι πολυωνυμικές συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες γνωρίζουμε ότι
$f(x)=f(0)x+f(1)-1$, $g(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ και $(g\circ f)(x)=x^2+2x+2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Β1. Να δείξετε ότι $f(x)=x+1$.

2 μονάδες

Β2. Να δείξετε ότι $g(x)=x^2+1$.

4 μονάδες

Β3. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g, $\ln f$, $e^{f(x)}$, $|f|$.

5 μονάδες

Β4. Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{g^3(x)-8}{f(x)}$ **β)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|g(x)-f(x)|-|f(x)|+2}{\sqrt{f(x)-1}-1}$ **γ)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{g(x)}-f(x)\right)$

6 μονάδες

Β5. Να βρείτε τις τιμές των $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$ για τις οποίες $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\kappa g(x)+\lambda f(x)}{x-1}=2$

4 μονάδες

Β6. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)=\begin{cases} f(x), & x\le 0\\ g(x), & x>0\end{cases}$ αντιστρέφεται και να βρείτε την h^{-1}.

4 μονάδες

Θέμα Γ

Δίνεται η συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f:\Delta\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

- Η f έχει αντίστροφη την συνάρτηση $f^{-1}:\Delta\to\mathbb{R}$.
- $f(x)=f^{-1}(x)$ για κάθε $x\in\Delta$.
- Το σημείο $M(\alpha,\beta)$ με $\alpha<\beta$ και $\alpha,\beta\in\Delta$, ανήκει στην γραφική παράσταση της f.

Γ1. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=x$ έχει μοναδική ρίζα στο (α,β).

7 μονάδες

Γ2. Δώστε ένα παράδειγμα μίας τέτοιας συνάρτησης f.

4 μονάδες

Γ3. Αν για την f ισχύει $\left(f^2(x)+x-1\right)^2=x^4+2x^3-x^2-2x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε να δείξετε ότι η εξίσωση $f^2(x)=1-x$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$.

7 μονάδες

Γ4. Αν $f^{-1}(1)=-1$, τότε να βρείτε τους πιθανούς τύπους της συνάρτησης $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $g^2(x)+2\left(f(x)-g(x)\right)=f^2(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $\left(g(-2)-1\right)\left(g(0)-1\right)<0$.

7 μονάδες

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$, $x>0$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

3 μονάδες

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται με $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

7 μονάδες

Δ3. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{xf(x)}}{x}$ **β)** $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{1}{x\eta\mu\left(f(x)\right)-x^2+1}$.

$3+6=9$ μονάδες

Δ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\rho\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε $\rho f(\rho)=e^{-\rho}$. Στη συνέχεια να εξετάσετε αν το ρ είναι ποιο κοντά στο 1 ή στο 2.

6 μονάδες

Ευχόμαστε κάθε επιτυχία!

Στέλιος Μιχαήλογλου – Νίκος Τούντας

Askisopolis

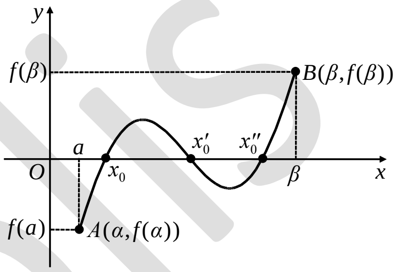
Λύσεις

Θέμα Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και, επιπλέον, ισχύει $f(\alpha)f(\beta)<0$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον, $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$.

Δηλαδή, υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο ανοικτό διάστημα (α,β).

Γεωμετρική ερμηνεία
Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f στο $[\alpha,\beta]$. Επειδή τα σημεία $A(\alpha,f(\alpha))$ και $B(\beta,f(\beta))$ βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα $x'x$, η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα σε ένα τουλάχιστον σημείο.



Α2. Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού *A* και για κάθε $x\in A$ ισχύει $f(x)=g(x)$. Για να δηλώσουμε ότι δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες γράφουμε f = g.

Α3. α) Λάθος **β)** Σωστό **γ)** Σωστό **δ)** Σωστό **ε)** Λάθος

Α4. Ο μαθητής θεωρεί ότι αν μία συνάρτηση f, ορισμένη στο $\mathbb{R}$, είναι συνεχής στο $[\alpha,+\infty)$ τότε είναι συνεχής και στο $x_0=\alpha$ πράγμα που δεν ισχύει, καθώς είναι $\lim\limits_{x\to\alpha^+}f(x)=f(\alpha)$ όμως δεν ισχύει υποχρεωτικά ότι και $\lim\limits_{x\to\alpha^-}f(x)=f(\alpha)$.

Η σωστή λύση είναι η εξής:

Αφού g συνεχής στο μηδέν τότε $\lim\limits_{x\to0^-}g(x)=\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=g(0)$ άρα $\lim\limits_{x\to0^-}g(x)=g(0)\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=g(0)$.

Αφού η h είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ τότε $\lim\limits_{x\to0^+}h(x)=h(0)\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=h(0)=f(0)$.

Αφού $g(0)=h(0)$ τότε $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)$ άρα η f συνεχής στο μηδέν.

Θέμα Β

Β1. Για x = 1 είναι $\cancel{f(1)}=f(0)+\cancel{f(1)}-1\Leftrightarrow f(0)=1$, οπότε $f(x)=x+f(1)-1$.
Για x = 0 είναι $f(0)=0+f(1)-1\Leftrightarrow1=f(1)-1\Leftrightarrow f(1)=2$, άρα $f(x)=x+1$.

Β2. 1ος τρόπος: Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $g(f(x))=\alpha(x+1)^2+\beta(x+1)+\gamma\Leftrightarrow$
$(g\circ f)(x)=\alpha x^2+2\alpha x+\alpha+\beta x+\beta+\gamma=\alpha x^2+(2\alpha+\beta)x+\alpha+\beta+\gamma$.

Για να είναι $(g\circ f)(x)=x^2+2x+2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ πρέπει $\begin{cases}\alpha=1\\2\alpha+\beta=2\\\alpha+\beta+\gamma=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=1\\2+\beta=2\\1+\beta+\gamma=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=1\\\beta=0\\\gamma=1\end{cases}$,

Askisopolis

Άρα τελικά έχουμε ότι $g(x)=x^2+1$.

2ος τρόπος

Για $x=-1: g(f(-1))=g(0)=(-1)^2-2+2=1$ οπότε $\gamma=1$.

Για $x=0: g(f(0))=g(1)=2$ οπότε $\alpha+\beta+1=2 \Leftrightarrow \alpha+\beta=1(1)$ και

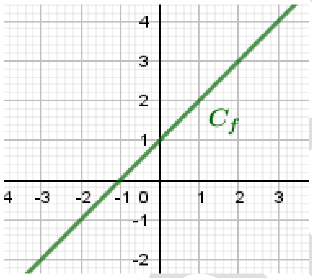
για $x=1: g(f(1))=g(2)=1^2+2+2=5$ οπότε

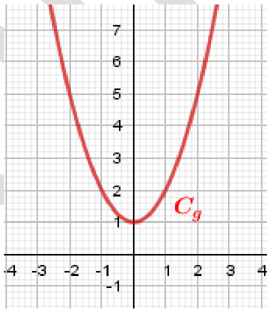
$4\alpha+2\beta+1=5 \Leftrightarrow 4\alpha+2\beta=4 \Leftrightarrow 2\alpha+\beta=2$ (2).

Με αφαίρεση της σχέσης (1) από τη σχέση (2) έχουμε $\alpha=1$ άρα $\beta=0$.

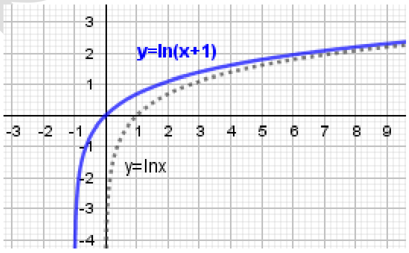
Επομένως $g(x)=x^2+1$.

Β3. Η f είναι ευθεία που τέμνει τους άξονες στα σημεία $(0,1)$ και $(1,0)$.

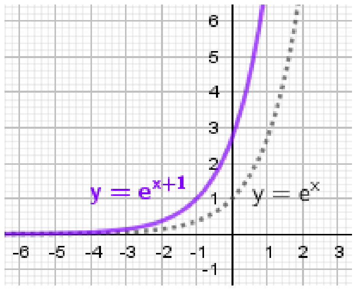




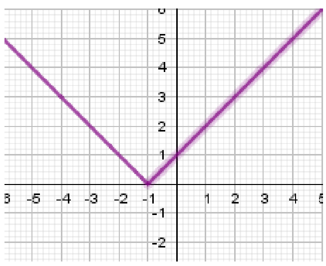
Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της $y=x^2$ κατά 1 μονάδα προς τα πάνω.



Είναι $y=\ln f(x)=\ln(x+1)$. Η γραφική της παράσταση προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της $y=\ln x$ κατά 1 μονάδα αριστερά.



Είναι $y=e^{f(x)}=e^{x+1}$. Η γραφική της παράσταση προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της $y=e^x$ κατά 1 μονάδα αριστερά.



Η γραφική παράσταση της $y=|f(x)|=|x+1|$ προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της $y=|x|$ κατά 1 μονάδα αριστερά.

Β4. α) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{g^3(x)-8}{f(x)}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x^2+1)^3-8}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x^2+1-2)\left[(x^2+1)^2+2(x^2+1)+4\right]}{x+1}=$

Askisopolis

$$\lim_{x\to -1}\frac{\left(x^2-1\right)\left[\left(x^2+1\right)^2+2\left(x^2+1\right)+4\right]}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x-1)\cancel{(x+1)}\left[\left(x^2+1\right)^2+2\left(x^2+1\right)+4\right]}{\cancel{x+1}}=-2\cdot 12=-24$$

β) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left|g(x)-f(x)\right|-\left|f(x)\right|+2}{\sqrt{f(x)-1}-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left|x^2+\cancel{1}-x-\cancel{1}\right|-\left|x+1\right|+2}{\sqrt{x+\cancel{1}-\cancel{1}}-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left|x^2-x\right|-\left|x+1\right|+2}{\sqrt{x}-1}=$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left[\left|x(x-1)\right|-(x+1)+2\right]\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left[|x||x-1|-x+1\right]\left(\sqrt{x}+1\right)}{x-1}$

Είναι

$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\left[|x||x-1|-x+1\right]\left(\sqrt{x}+1\right)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\left[-x(x-1)-x+1\right]\left(\sqrt{x}+1\right)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\left(-x^2+\cancel{x}-\cancel{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{x-1}=$

$=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-\cancel{(x-1)}(x+1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\cancel{x-1}}=-4$ και

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\left[|x||x-1|-x+1\right]\left(\sqrt{x}+1\right)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\left[x(x-1)-(x-1)\right]\left(\sqrt{x}+1\right)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\cancel{(x-1)}(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\cancel{x-1}}=0$, άρα

δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left|g(x)-f(x)\right|-\left|f(x)\right|+2}{\sqrt{f(x)-1}-1}$

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{g(x)}-f(x)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x-1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}-1\right)=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}-1\right)=0-1=-1$$

B5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\kappa g(x)+\lambda f(x)}{x-1}=2\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\kappa x^2+\kappa+\lambda x+\lambda}{x-1}=2$

Έστω $\varphi(x)=\dfrac{\kappa x^2+\kappa+\lambda x+\lambda}{x-1}$, $x\neq 1$ με $\lim\limits_{x\to 1}\varphi(x)=2$. Τότε $\varphi(x)(x-1)=\kappa x^2+\kappa+\lambda x+\lambda\Rightarrow$

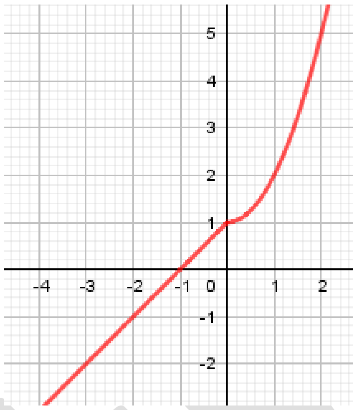
$\lim\limits_{x\to 1}\left[\varphi(x)(x-1)\right]=\lim\limits_{x\to 1}\left(\kappa x^2+\kappa+\lambda x+\lambda\right)\Leftrightarrow 0=2\kappa+2\lambda\Leftrightarrow\lambda=-\kappa$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\kappa x^2+\kappa+\lambda x+\lambda}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\kappa x^2+\cancel{\kappa}-\kappa x-\cancel{\kappa}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\kappa x\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}=\kappa$, άρα κ = 2 και λ = - 2.

Πράγματι είναι $\lim\limits_{x\to 1}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+\cancel{2}-x-\cancel{2}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}=2$

Askisopolis

B6. Είναι $h(x)=\begin{cases} x+1, & x\le 0 \\ x^2+1, & x>0 \end{cases}$.



Στο διπλανό σχήμα σχεδιάσαμε την γραφική παράσταση της h, στην οποία φαίνεται ότι η h είναι 1-1.

2^ος^ τρόπος

Η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0)$ γιατί είναι της μορφής $\alpha x+\beta$ με $\alpha>0$,είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ γιατί η συνάρτηση x^2+1 είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Έστω $x_1\le 0<x_2$.

Τότε $x_1+1\le 1<x_2^2+1$ οπότε $h(x_1)<h(x_2)$ άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της άρα και 1-1)

Για $x\le 0$ είναι $h(x)=y\Leftrightarrow x+1=y\Leftrightarrow x=y-1$.

Είναι $x\le 0\Leftrightarrow y-1\le 0\Leftrightarrow y\le 1$, άρα $h^{-1}(y)=y-1,\ y\le 1$.

Για $x>0$ είναι $h(x)=y\Leftrightarrow x^2+1=y\Leftrightarrow x^2=y-1$.

Είναι $x^2>0\Leftrightarrow y-1>0\Leftrightarrow y>1$, οπότε $x=\sqrt{y-1}\Leftrightarrow h^{-1}(y)=\sqrt{y-1},\ y>1$.

Άρα $h^{-1}(y)=\begin{cases} y-1, & y\le 1 \\ \sqrt{y-1}, & y>1 \end{cases}$ και $h^{-1}(x)=\begin{cases} x-1, & x\le 1 \\ \sqrt{x-1}, & x>1 \end{cases}$.

Θέμα Γ

Γ1. $f(x)=x\Leftrightarrow f(x)-x=0\quad (1)$ για $x\in(\alpha,\beta)$

Έστω η συνάρτηση $g(x)=f(x)-x$, $x\in[\alpha,\beta]$ άρα η εξίσωση (1) γίνεται: $g(x)=0$

Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Γνωρίζουμε ότι το σημείο $M(\alpha,\beta)$ με $\alpha<\beta$ και $\alpha,\beta\in\Delta$, ανήκει στην γραφική παράσταση της f, δηλαδή έχουμε ότι $f(\alpha)=\beta\Leftrightarrow f^{-1}(\beta)=\alpha$. Επίσης ισχύει $f(x)=f^{-1}(x)$ για κάθε $x\in\Delta$ άρα για $x=\alpha$ έχουμε $f(\alpha)=f^{-1}(\alpha)=\beta$ και για $x=\beta$ έχουμε $f(\beta)=f^{-1}(\beta)=\alpha$

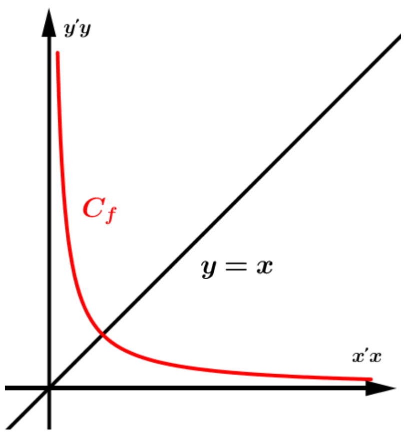
Είναι $g(\alpha)=f(\alpha)-\alpha=\beta-\alpha>0$ και $g(\beta)=f(\beta)-\beta=\alpha-\beta<0$ άρα $g(\alpha)g(\beta)<0$.

Από το θεώρημα Bolzano έπεται ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $g(x_0)=0$.

Για κάθε $x_1,x_2\in[\alpha,\beta]\subseteq\Delta$ με $x_1<x_2$ έχουμε $-x_1>-x_2$ και $f(x_1)>f(x_2)$ αφού f φθίνουσα στο Δ και προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε $g(x_1)>g(x_2)\Rightarrow g\searrow\Delta$.

Άρα το x_0 είναι μοναδικό και η εξίσωση $g(x)=0\Leftrightarrow f(x)=x$ έχει μοναδική ρίζα στο (α,β).

Γ2.

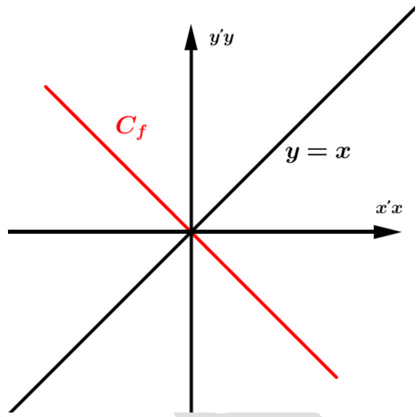


1^ο^ παράδειγμα:

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $x>0$. Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$ και έχει αντίστροφη την $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{x}$, $x>0$, δηλαδή $f=f^{-1}$. Η f έχει μοναδικό κοινό σημείο με την $y=x$ το $M(1,1)$ και προφανώς ικανοποιεί όλες τις προϋποθέσεις της άσκησης.

Askisopolis

2ο παράδειγμα:
Έστω η συνάρτηση $f(x)=-x$, $x\in\mathbb{R}$. Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και έχει αντίστροφη την $f^{-1}(x)=-x$, $x\in\mathbb{R}$, δηλαδή $f=f^{-1}$. Η f έχει μοναδικό κοινό σημείο με την $y=x$ το $O(0,0)$ και προφανώς ικανοποιεί όλες τις προϋποθέσεις της άσκησης.



Γ3. 1ος τρόπος: Θυμηθείτε την ταυτότητα $(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma$

$(f^2(x)+x-1)^2=x^4+2x^3-x^2-2x+1\Leftrightarrow(f^2(x)+x-1)^2=(x^2+x-1)^2 \quad (M)$

Έστω η συνάρτηση $g(x)=x^2+x-1$, $x\in[0,1]$ η οποία είναι συνεχής ως πολυωνυμική.

Είναι $g(0)=-1$ και $g(1)=1$ άρα $g(0)g(1)<0$. Από το θεώρημα Bolzano έπεται ότι υπάρχει $x_1\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $g(x_1)=0\Leftrightarrow x_1^2+x_1-1=0$

Για $x=x_1$ στην σχέση (M) έχουμε:

$(f^2(x_1)+x_1-1)^2=(x_1^2+x_1-1)^2\Leftrightarrow(f^2(x_1)+x_1-1)^2=0\Leftrightarrow f^2(x_1)+x_1-1=0\Leftrightarrow f^2(x_1)=1-x_1$

Άρα η εξίσωση $f^2(x)=1-x$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$.

2ος τρόπος: Ομοίως με τον πρώτο απλά βρίσκουμε τις ρίζες της g αφού είναι τριώνυμο με $\Delta=5$. Έχει ρίζες τις $\rho_1=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ και $\rho_2=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Έστω ότι το $\rho_1\in(0,1)$, πράγματι $0<\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}<1\Leftrightarrow 0<-1+\sqrt{5}<2\Leftrightarrow 1<\sqrt{5}<3$ ισχύει.

Άρα όπως πάνω δείχνουμε ότι μία ρίζα της εξίσωσης $f^2(x)=1-x$ είναι η ρ_1 δηλαδή έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$.

Σχόλιο: Αν αφήσουμε την σχέση (M) στην μορφή $(f^2(x)+x-1)^2=x^4+2x^3-x^2-2x+1$ και θέσουμε την συνάρτηση $g(x)=x^4+2x^3-x^2-2x+1$, $x\in(0,1)$ τότε $g(0)=1$ και $g(1)=1$ άρα δεν δουλεύει το θεώρημα Bolzano και αν παρατηρήσουμε δεν μπορούμε να κάνουμε και Horner.

Γ4. Είναι $f^{-1}(1)=-1\Leftrightarrow f(-1)=1$.

$g^2(x)+2(f(x)-g(x))=f^2(x)\Leftrightarrow g^2(x)-2g(x)=f^2(x)-2f(x)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow g^2(x)-2g(x)+1=f^2(x)-2f(x)+1\Leftrightarrow(g(x)-1)^2=(f(x)-1)^2\Leftrightarrow|g(x)-1|=|f(x)-1|$

Θέτω $v(x)=g(x)-1$, $x\in\mathbb{R}$ και ισχύει $v(x)=0\Leftrightarrow|v(x)|=0\Leftrightarrow|f(x)-1|=0\Leftrightarrow f(x)-1=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x)=1\Leftrightarrow f(x)=f(-1)\overset{f\searrow}{\underset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow}}x=-1$ και επειδή η v συνεχής ως πράξεις συνεχών τότε διατηρεί πρόσημο εκατέρωθεν της ρίζας δηλαδή στα διαστήματα $(-\infty,-1),(-1,+\infty)$.

Επειδή $(g(-2)-1)(g(0)-1)<0\Leftrightarrow v(-2)v(0)<0$ τότε:

Askisopolis

- $\nu(-2)<0 \Rightarrow \nu(x)<0$ στο $(-\infty,-1)$ και $\nu(0)>0 \Rightarrow \nu(x)>0$ στο $(-1,+\infty)$

ή

- $\nu(-2)>0 \Rightarrow \nu(x)>0$ στο $(-\infty,-1)$ και $\nu(0)<0 \Rightarrow \nu(x)<0$ στο $(-1,+\infty)$

1η περίπτωση: Αν $\nu(x)>0$ στο $(-\infty,-1)$ και $\nu(x)<0$ στο $(-1,+\infty)$.

Για $x<-1 \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(x)>f(-1)=1 \Leftrightarrow f(x)-1>0$:

$$|g(x)-1|=|f(x)-1| \Leftrightarrow g(x)-1=f(x)-1 \Leftrightarrow g(x)=f(x)$$

Για $x>-1 \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(x)<f(-1)=1 \Leftrightarrow f(x)-1<0$:

$$|g(x)-1|=|f(x)-1| \Leftrightarrow -g(x)+1=-f(x)+1 \Leftrightarrow -g(x)=-f(x) \Leftrightarrow g(x)=f(x)$$

Για $x=-1$: $\nu(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=1$

Άρα $g(x)=\begin{cases} f(x) & , x\neq -1 \\ 1 & , x=-1 \end{cases}$

2η περίπτωση: Αν $\nu(x)<0$ στο $(-\infty,-1)$ και $\nu(x)>0$ στο $(-1,+\infty)$.

Για $x<-1 \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(x)>f(-1)=1 \Leftrightarrow f(x)-1>0$:

$$|g(x)-1|=|f(x)-1| \Leftrightarrow -g(x)+1=f(x)-1 \Leftrightarrow g(x)=-f(x)+2$$

Για $x>-1 \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(x)<f(-1)=1 \Leftrightarrow f(x)-1<0$:

$$|g(x)-1|=|f(x)-1| \Leftrightarrow g(x)-1=-f(x)+1 \Leftrightarrow -g(x)=-f(x)+2$$

Για $x=-1$: $\nu(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=1$

Άρα $g(x)=\begin{cases} -f(x)+2 & , x\neq -1 \\ 1 & , x=-1 \end{cases}$.

Θέμα Δ

Δ1. 1ος τρόπος: Είναι $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x}=\dfrac{x^2}{x}-\dfrac{1}{x}=x-\dfrac{1}{x}$

Για κάθε $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ (1) είναι $\dfrac{1}{x_1}>\dfrac{1}{x_2} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{x_1}<-\dfrac{1}{x_2}$ (2) και με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2) έχουμε: $x_1-\dfrac{1}{x_1}<x_2-\dfrac{1}{x_2} \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2) \Rightarrow f\nearrow(0,+\infty)$.

2^{ος} τρόπος: Για κάθε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ είναι $f(x_1) - f(x_2) = \dfrac{x_1^{\ 2} - 1}{x_1} - \dfrac{x_2^{\ 2} - 1}{x_2} =$

$$= \frac{x_1^{\ 2}x_2 - x_2 - x_1x_2^{\ 2} + x_1}{x_1x_2} = \frac{x_1x_2(x_1 - x_2) + x_1 - x_2}{x_1x_2} = \frac{(x_1 - x_2)(x_1x_2 + 1)}{x_1x_2} < 0 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f \nearrow (0, +\infty)$$

αφού έχουμε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ και $x_1 < x_2$

Δ2. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

Είναι $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+}\left(x - \dfrac{1}{x}\right) = -\infty$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(x - \dfrac{1}{x}\right) = +\infty$.

Επειδή η f είναι συνεχής, έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, οπότε $A_{f^{-1}} = \mathbb{R}$.

Για κάθε $x > 0,\ y \in \mathbb{R}$ έχουμε: $f(x) = y \Leftrightarrow x - \dfrac{1}{x} = y \Leftrightarrow x^2 - 1 = yx \Leftrightarrow x^2 - yx - 1 = 0 \quad (3)$

Η (3) είναι εξίσωση 2^{ου} βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = y^2 + 4 > 0$ και ρίζες $x_{1,2} = \dfrac{y \pm \sqrt{y^2 + 4}}{2}$.

Θα βρούμε το πρόσημο των ριζών με τους παρακάτω τρόπους:

1^{ος} τρόπος: (Με άλγεβρα Β΄ Λυκείου)

- Υποθέτουμε ότι $y + \sqrt{y^2 + 4} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{y^2 + 4} > -y \quad (1)$

  Αν $y > 0 \Leftrightarrow -y < 0$ τότε η (1) ισχύει γιατί $\sqrt{y^2 + 4} \geq 0$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$.
  Αν $y = 0$ τότε η (1) γίνεται $2 > 0$ ισχύει.

  Αν $y < 0 \Leftrightarrow -y > 0$ τότε η (1) γίνεται: $\sqrt{y^2 + 4}^{\,2} > (-y)^2 \Leftrightarrow \cancel{y^2} + 4 > \cancel{y^2} \Leftrightarrow 4 > 0$ ισχύει.

  Άρα τελικά $y + \sqrt{y^2 + 4} > 0$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$.
- Υποθέτουμε ότι $y - \sqrt{y^2 + 4} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{y^2 + 4} > y \quad (2)$

  Αν $y < 0$ τότε η (2) ισχύει γιατί $\sqrt{y^2 + 4} \geq 0$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$.
  Αν $y = 0$ τότε η (2) γίνεται $2 > 0$ ισχύει.

  Αν $y > 0$ τότε η (2) γίνεται: $\sqrt{y^2 + 4}^{\,2} > y^2 \Leftrightarrow \cancel{y^2} + 4 > \cancel{y^2} \Leftrightarrow 4 > 0$ ισχύει.

  Άρα τελικά $y + \sqrt{y^2 + 4} < 0$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$.

2^{ος} τρόπος: (Αλγεβρική λύση με χρήση μίας ανισότητας που ισχύει)

Ισχύει $4 > 0 \Leftrightarrow y^2 + 4 > y^2 \Leftrightarrow \sqrt{y^2 + 4} > \sqrt{y^2} \Leftrightarrow \sqrt{y^2 + 4} > |y| \Leftrightarrow -\sqrt{y^2 + 4} < y < \sqrt{y^2 + 4} \ (3)$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$.

$(3) \Rightarrow y - \sqrt{y^2 + 4} < 0$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$ και $(3) \Rightarrow y + \sqrt{y^2 + 4} > 0$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$.

3^{ος} τρόπος: (Με χρήση του θεωρήματος διατήρησης προσήμου)

- Έστω η συνάρτηση $g(y) = y + \sqrt{y^2 + 4}$, $y \in \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής ως σύνθεση και πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Είναι $g(y) = 0 \Leftrightarrow y + \sqrt{y^2 + 4} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{y^2 + 4} = -y$ πρέπει $-y \geq 0 \Leftrightarrow y \leq 0$ άρα γίνεται $\Leftrightarrow \sqrt{y^2 + 4}^{\,2} = (-y)^2 \Leftrightarrow y^2 + 4 = y^2 \Leftrightarrow 4 = 0$ αδύνατη.

  Άρα επειδή η g είναι συνεχής και $g(y) \neq 0$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$ τότε η g θα διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

  Επειδή $g(0) = 2 > 0$ τότε $g(y) > 0$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$. Άρα τελικά $y + \sqrt{y^2 + 4} > 0$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$.

Askisopolis

- Έστω η συνάρτηση $g(y)=y-\sqrt{y^2+4}$, $y\in\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής ως σύνθεση και πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Είναι $g(y)=0 \Leftrightarrow y-\sqrt{y^2+4}=0 \Leftrightarrow \sqrt{y^2+4}=y$ πρέπει $y\geq 0$ άρα γίνεται $\Leftrightarrow \sqrt{y^2+4}^2=y^2 \Leftrightarrow y^2+4=y^2 \Leftrightarrow 4=0$ αδύνατη.

  Άρα επειδή η g είναι συνεχής και $g(y)\neq 0$ για κάθε $y\in\mathbb{R}$ τότε η g θα διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

  Επειδή $g(0)=-2<0$ τότε $g(y)<0$ για κάθε $y\in\mathbb{R}$. Άρα τελικά $y-\sqrt{y^2+4}<0$ για κάθε $y\in\mathbb{R}$.

Επειδή $x>0$, είναι $x=\frac{y+\sqrt{y^2+4}}{2}$, άρα $f^{-1}(y)=\frac{y+\sqrt{y^2+4}}{2}$, $y\in\mathbb{R}$, οπότε

$f^{-1}(x)=\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

Δ3. α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{xf(x)}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x\frac{x^2-1}{x}}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=1$

β) $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{1}{x\eta\mu(f(x))-x^2+1}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{1}{x\left[\eta\mu(f(x))-\frac{x^2-1}{x}\right]}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{1}{x\left[\eta\mu(f(x))-f(x)\right]}$

Για κάθε x > 1 είναι $f(x)=\frac{x^2-1}{x}>0$ και $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=0$, οπότε θέτοντας $f(x)=u$, έχουμε

$\lim\limits_{x\to1^+}\frac{1}{\left[\eta\mu(f(x))-f(x)\right]}=\lim\limits_{u\to0^+}\frac{1}{\eta\mu u-u}$

Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $|\eta\mu x|\leq|x|$ και το ίσον ισχύει μόνο για x = 0, οπότε για x > 0 είναι $|\eta\mu x|<x \Leftrightarrow -x<\eta\mu x<x \Leftarrow \eta\mu x-x<0$. Επειδή επιπλέον $\lim\limits_{u\to0^+}(\eta\mu u-u)=0$ είναι

$\lim\limits_{u\to0^+}\frac{1}{\eta\mu u-u}=-\infty$, οπότε $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{1}{x\left[\eta\mu(f(x))-f(x)\right]}=-\infty$

Δ4. Έστω $g(x)=xf(x)-e^{-x}=x^2-1-e^{-x}$, $x\in[1,2]$.

Είναι $g(1)=-\frac{1}{e}<0$ και $g(2)=4-1-e^{-2}=3-\frac{1}{e^2}>0$.

Επειδή $g(1)g(2)<0$ και η g είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $\rho\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε $g(\rho)=0 \Leftrightarrow \rho f(\rho)=e^{-\rho}$.

Για κάθε $x_1,x_2\in[1,2]$ με $x_1<x_2$ είναι $x_1^2<x_2^2 \Leftrightarrow x_1^2<x_2^2 \Leftrightarrow x_1^2-1<x_2^2-1$ (4) και $-x_1>-x_2 \Leftrightarrow e^{-x_1}>e^{-x_2} \Leftrightarrow -e^{-x_1}<-e^{-x_2}$ (5).

Με πρόσθεση κατά μέλη των (4) και (5) προκύπτει ότι

$x_1^2-1-e^{-x_1}<x_2^2-1-e^{-x_2} \Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2) \Rightarrow g\nearrow[1,2]$, οπότε το ρ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $g(x)=0 \Leftrightarrow xf(x)=e^x$ στο $(1,2)$.

Είναι $g\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4}-1-e^{-\frac{3}{2}}=\frac{5}{4}-\frac{1}{\sqrt{e^3}}=\frac{5\sqrt{e^3}-4}{4\sqrt{e^3}}>0$ γιατί $5\sqrt{e^3}-4>0 \Leftrightarrow \sqrt{e^3}>\frac{4}{5} \Leftrightarrow e^3>\frac{16}{25}$ ισχύει γιατί $\frac{16}{25}<1$, οπότε $g(1)g\left(\frac{3}{2}\right)<0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $\left[1,\frac{3}{2}\right]$, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, η εξίσωση $g(x)=0 \Leftrightarrow xf(x)=e^x$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $\left(1,\frac{3}{2}\right)$. όμως το ρ είναι η μοναδική ρίζα της g στο $(1,2)$, οπότε $\rho \in \left(1,\frac{3}{2}\right)$.

Επειδή το $\frac{3}{2}$ είναι το μέσο του διαστήματος $(1,2)$, το ρ είναι ποιο κοντά στο 1 από ότι στο 2.

Askisopolis